$\mathbb{C}$

1. On considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel réel.

   i) Montrez que la formule
   $$\langle z, z_1 \rangle := \mathrm{Re}(z \cdot \bar{z}_1)$$
   définie un produit scalaire sur $\mathbb{C}$.

   ii) Qu'est la norme correspondante ?

   iii) Montrez que 1 et i est une base orthonormée de $\mathbb{C}$.

2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction dont les fonctions coordonnées sont $g(x,y)$ et $h(x,y)$, c'est-à-dire $f(x+iy) = g(x,y) + i\,h(x,y)$. On suppose que f est différentiable en point $z = x+iy$ au sens d'analyse réel. Trouver les conditions suffisantes et necéssaires pour que la différentielle au point z soit une application $\mathbb{C}$-linéaire.

3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction. On pose
   $$f'(z) := \lim_{\substack{u \to 0 \\ u \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+u) - f(z)}{u}.$$

On suppose que $f'(z)$ existe. Montrer que alors f est différentiable au point z au sens d'analyse réel et que la différentielle $d_z f$ est donnée par le formule

$$(d_z f)(a+bi) = f'(z)\cdot(a+bi).$$

4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par la formule

i) $f(z) = az + b$

ii) $f(z) = 1/z$

iii) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Montrer que $f'(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ sauf $z = 0$ dans ii) et $z = -\frac{d}{c}$ dans iii).

Actions de groupes

1. Soit $S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$. Montrer que $\varphi : \mathbb{C} \times S^1 \to \mathbb{C}$, $\varphi(u, z) = uz$ définie action de S^1 sur $\mathbb{C}$. Est-ce que cette action est transitive ? fidèle ?

2. Soit $\mu_n := \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$. Soit $w \in \mathbb{C}$ et soit $M_w := \{ u \in \mathbb{C} \mid u^n = w \}$. Montrer que $\varphi : M_w \times \mu_n \to M_w$, $\varphi(u, \xi) := u\xi$ définie une action transitive et fidèle de μ_n sur M_w.

3. Soit $S^1_r := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = r \}$. Montrer que $\varphi : S^1_r \times \mathbb{R} \to S^1_r$, $\varphi(z, t) = z e^{2\pi i t}$ définie une action de $\mathbb{R}$ sur S^1_r. Est-ce que S^1_r est un espace affine sur $\mathbb{R}$?

4. Soit $\mathbb{R}^{>0} = \{ r \in \mathbb{R} \mid r > 0 \}$. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$, $\varphi(r, t) = r e^t$ définie une action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{>0}$. Est-ce que $\mathbb{R}^{>0}$ est un espace affine sur $\mathbb{R}$.